§ 31. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

31.1. Понятия о рациональных функциях

Многочлен (некоторые сведения справочного характера)

Функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \tag{31.1}$$

где n — натуральное число, a_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ — постоянные коэффициенты, называется ***многочленом*** (или ***целой рациональной функцией***). Число n называется ***степенью*** многочлена.

Корнем многочлена (31.1) называется такое значение x_0 (вообще говоря, комплексное) переменной x, при котором многочлен обращается в нуль, т. е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 31.1. Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_1$, т. е.

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x), \tag{31.2}$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n - 1)$.

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 31.2 (основная теорема алгебры). Всякий многочлен n-й степени $(n > 0)$ имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Пользуясь основной теоремой алгебры, докажем теорему о разложении многочлена на линейные множители.

Теорема 31.3. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \tag{31.3}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корни многочлена, a_0 — коэффициент многочлена при x^n.

❑ Рассмотрим многочлен (31.1). По теореме 31.2 он имеет корень. Обозначим его через x_1. Тогда имеет место соотношение (31.2). А так как $P_{n-1}(x)$ — также многочлен, то он имеет корень. Обозначим его через x_2. Тогда $P_{n-1}(x) = (x - x_2) \cdot P_{n-2}(x)$, где $P_{n-2}(x)$ — многочлен $(n-2)$-й степени. Следовательно, $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_{n-2}(x)$.

Продолжая этот процесс, получим в итоге:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n). \qquad \blacksquare$$

Множители $(x - x_i)$ в равенстве (31.3) называются ***линейными множителями***.

Пример 31.1. Разложить многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ на множители.

❍ Решение: Многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ обращается в нуль при $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Следовательно,

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2).$$ ●

Пример 31.2. Представить выражение $x^3 - x^2 + 4x - 4$ в виде произведения линейных множителей.

❍ Решение: Легко проверить, что

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x - 2i)(x + 2i).$$ ●

Если в разложении многочлена (31.3) какой-либо корень встретился k раз, то он называется *корнем кратности* k. В случае $k = 1$ (т. е. корень встретился один раз) корень называется *простым*.

Разложение многочлена (31.3) можно записать в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r}, \qquad (31.4)$$

если корень x_1 имеет кратность k_1, корень x_2 — кратность k_2 и так далее. При этом $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, а r — число различных корней.

Например, разложение

$$P_8(x) = (x - 3)(x + 1)(x - 4)(x - 3)(x - 3)x(x - 4)(x - 3)$$

можно записать так:

$$P_8(x) = (x - 3)^4 \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)^2 \cdot x.$$

Пользуясь теоремой 31.3, можно доказать следующие утверждения.

Теорема 31.4. Если многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Теорема 31.5. Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

Теорема 31.6. Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a + ib$, то он имеет и сопряженный корень $a - ib$.

В разложении многочлена (31.3) комплексные корни входят сопряженными парами. Перемножив линейные множители

$$(x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib)),$$

получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами $x^2 + px + q$. В самом деле,

$$(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = ((x - a) - ib)((x - a) + ib) = \\ = (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$.

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

С учетом вышеизложенного справедлив следующий факт.

Теорема 31.7. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т. е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r} \times \\ \times (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}. \quad (31.5)$$

При этом $k_1 + k_2 + \cdots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \cdots + s_m) = n$, все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней.

Примеры разложений (31.5):

1) $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$;

2) $x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x - 4)(x + 4)$;

3) $x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9 = x^3(x^2 - 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) = (x^2 - 6x + 9)(x^3 - 1) = (x - 3)^2 \cdot (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Дробно-рациональная функция

Дробно-рациональной функцией (или ***рациональной дробью***) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m, а $Q_n(x)$ — многочлен степени n.

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m < n$; в противном случае (если $m \geqslant n$) рациональная дробь называется ***неправильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, т. е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Например, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ — неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель в столбик:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\qquad -5x+9 & x-2 \\
\underline{x^4 - 2x^3} \qquad\qquad\qquad & x^3+2x^2+4x+3 \\
2x^3 \quad -5x+9 & \\
\underline{2x^3 - 4x^2} \qquad\quad & \\
4x^2-5x+9 & \\
\underline{4x^2-8x} \quad & \\
3x+9 & \\
\underline{3x-6} & \\
15. &
\end{array}
$$

Получим частное $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток $R(x) = 15$. Следовательно, $\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x-2}$.

Правильные рациональные дроби вида

(I). $\frac{A}{x-a}$;

(II). $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$);

(III). $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2 - 4q < 0$);

(IV). $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ($k \geqslant 2$, корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q — действительные числа, называются ***простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов.***

Теорема 31.8. Всякую *правильную* рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \ldots (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \ldots (x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \\
&\quad + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \ldots \\
&\ldots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ldots \\
&\ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2} + \ldots + \frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}},
\end{aligned}
\tag{31.6}
$$

где $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, D_1, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ — некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3}$;

2) $\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$;

3) $\frac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}$.

Пример 31.3. Представить дробь $\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ в виде суммы простейших дробей.

Решение: Согласно теореме 31.8 имеем:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5},$$

т. е.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A(x^2-2x+5)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Отсюда следует

$$2x^2-3x-3 \equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C,$$

т. е.

$$2x^2-3x-3 \equiv (A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C).$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, получаем

$$\begin{cases} 2 = A+B, \\ -3 = -2A-B+C, \\ -3 = 5A-C. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $A=-1$, $B=3$, $C=-2$. Следовательно,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$ ●

31.2. Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a}\,dx = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\cdot\ln|x-a|+C$ (формула (2) таблицы интегралов);

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\cdot\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$ (формула (1));

3. Рассмотрим интеграл $J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$.

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим:

$$J = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx,$$

причем $q-\frac{p^2}{4}>0$. Сделаем подстановку $x+\frac{p}{2}=t$. Тогда $x=t-\frac{p}{2}$, $dx=dt$. Положим $q-\frac{p^2}{4}=a^2$. Следовательно, используя формулы (2) и (15) таблицы интегралов, получаем

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}\,dt =$$

$$= M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot\ln(t^2+a^2) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C,$$

т. е., возвращаясь к переменной x,

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Пример 31.5. Найти $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}\,dx$.

Решение: $x^2+2x+10=(x+1)^2+9$. Сделаем подстановку $x+1=t$. Тогда $x=t-1$, $dx=dt$ и

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} - 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+9) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$

4. Вычисление интеграла вида $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx$, $k \geqslant 2$, $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Данный интеграл подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad a^2 = q-\frac{p^2}{4}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt =$$
$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right) = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right). \tag{31.8}$$

К последнему интегралу применим интегрирование по частям. Положим

$$u=t, \quad dv = \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad du = dt,$$
$$v = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}},$$

тогда

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} =$$
$$= \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\cdot J_{k-1}.$$

Подставляя найденный интеграл в равенство (31.8), получаем

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}\right),$$

т. е.

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого натурального числа $k>1$.

Пример 31.6. Найти интеграл $J_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

Решение: Здесь $a=1$, $k=3$. Так как

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C,$$

то

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}J_1 + \frac{t}{2\cdot(2-1)(t^2+1)} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C,$$

$$J_3 = \frac{3}{4}J_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2} = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) + C.$$

31.3. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотренный в пунктах 31.1–31.2 материал позволяет сформулировать *общее правило интегрирования рациональных дробей.*

1. Если дробь неправильна, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример 31.7. Найти интеграл $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$.

Решение: Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
-\,x^5 & & +2x^3 & & +4x+4 & x^4+2x^3+2x^2 \\ \cline{6-6}
x^5 & +2x^4 & +2x^3 & & & x-2 \\ \cline{1-3}
 & -\,-2x^4 & & & +4x+4 & \\
 & -2x^4 & -4x^3 & -4x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & 4x^3 & +4x^2 & +4x+4\ (\text{остаток}). &
\end{array}$$

Получаем:

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

$$4x^3+4x^2+4x+4 \equiv Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2,$$

т. е.

$$4x^3+4x^2+4x+4 \equiv (A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+2B.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A+C=4, \\ 2A+B+D=4, \\ 2A+2B=4, \\ 2B=4. \end{cases}$$

Находим: $B=2$, $A=0$, $C=4$, $D=2$. Стало быть,

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}$$

и

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx = \int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\,dx.$$

Обозначим $x+1=t$, тогда $x=t-1$ и $dx=dt$. Таким образом,

$$\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\,dx = \int\frac{4t-4+2}{t^2+1}\,dt = 4\int\frac{t\,dt}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= 4\cdot\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-2\,\mathrm{arctg}\,t+C =$$
$$= 2\cdot\ln(x^2+2x+2)-2\,\mathrm{arctg}(x+1)+C.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\,\mathrm{arctg}(x+1)+C.$$